PART3　三角関数を含む方程式の解が存在する条件

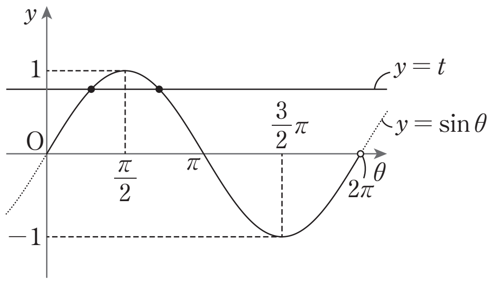
3　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　θ の方程式 $\sin\theta = t$ を満たす θ が存在するような定数 t の値の範囲を求めよ。

(2)　θ の方程式 $\sin\theta - \cos^2\theta = a$ を満たす θ が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

(1)　θ の方程式 $\sin\theta = t$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を満たす θ が存在するのは，$y = \sin\theta$ のグラフと直線 $y = t$ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ において共有点をもつときである。



(2)　$\sin\theta = t$ とおくと，θ が存在するのは，(1)より $-1 \leqq t \leqq 1$ のときである。
したがって，t の方程式が $-1 \leqq t \leqq 1$ に解をもつときの条件を考える。

第 8 講　PART3　確認問題

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の問いに答えよ。

1　θ の方程式 $\cos\theta = t$ を満たす θ が存在するような定数 t の値の範囲を求めよ。

[ア]

① $0 \leqq t \leqq 1$　　② $0 < t < 1$

③ $-1 \leqq t \leqq 0$　　④ $-1 < t < 0$

⑤ $-1 \leqq t \leqq 1$　　⑥ $-1 < t < 1$

2　θ の方程式 $2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = a$ を満たす θ が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

[イ]

① $-2 \leqq a \leqq 0$　　② $-2 \leqq a \leqq 1$

③ $-2 \leqq a \leqq \frac{9}{8}$　　④ $0 \leqq a \leqq 1$

⑤ $0 \leqq a \leqq \frac{9}{8}$　　⑥ $1 \leqq a \leqq \frac{9}{8}$

PART3　三角関数を含む方程式の解が存在する条件

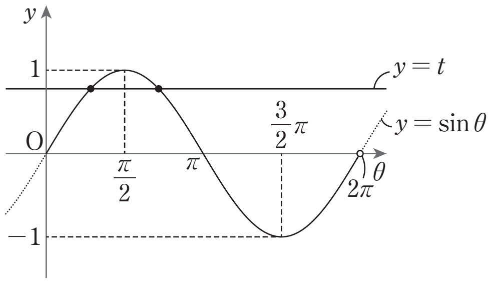
3　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　θ の方程式 $\sin\theta = t$ を満たす θ が存在するような定数 t の値の範囲を求めよ。

(2)　θ の方程式 $\sin\theta - \cos^2\theta = a$ を満たす θ が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ において θ の方程式 $\sin\theta = t$ を満たす θ が存在するのは，$y = \sin\theta$ のグラフと直線 $y = t$ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ において共有点をもつときである。

右図より　$-1 \leqq t \leqq 1$



(2)

$$\sin\theta - \cos^2\theta = a$$

$$\sin\theta - (1 - \sin^2\theta) = a$$

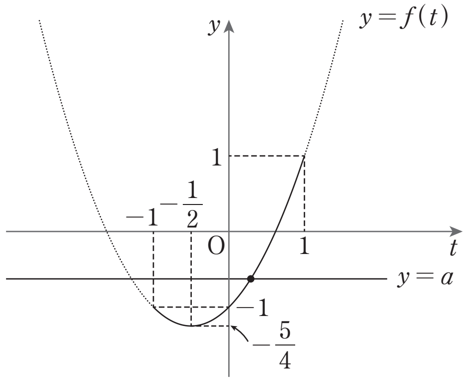
$$\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = a \quad \cdots\cdots ①$$

$\sin\theta = t$ とおくと　$t^2 + t - 1 = a$

この式の左辺を $f(t)$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ において θ の方程式①を満たす θ が存在するのは，(1)より t の方程式 $f(t) = a$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ に解をもつときであり，$y = f(t)$ のグラフと直線 $y = a$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ に共有点をもつときである。

$$f(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

であるから，右図より　$-\dfrac{5}{4} \leqq a \leqq 1$



第８講　PART3　確認問題 解答

1

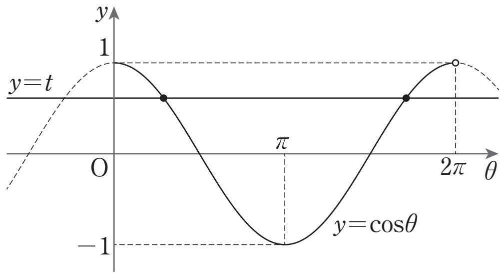
[正解] ア：⑤

[解説]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ において θ の方程式 $\cos\theta = t$ を満たす θ が存在するのは，$y=\cos\theta$ のグラフと直線 $y=t$ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ において共有点をもつときである。[A]

ゆえに，次図より求める t の値の範囲は

$$-1 \leqq t \leqq 1$$



[A]　ある区間において θ の方程式 $\cos\theta = t$ を満たす θ が存在するのは，$y=\cos\theta$ のグラフと直線 $y=t$ がその区間において共有点をもつときである。

2

[正解] イ：③

[解説]

$$2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = a$$

$$2(1-\cos^2\theta) + \cos\theta - 1 = a$$

$$-2\cos^2\theta + \cos\theta + 1 = a \cdots\cdots (*)$$

$\cos\theta = t$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ であり，$(*)$は

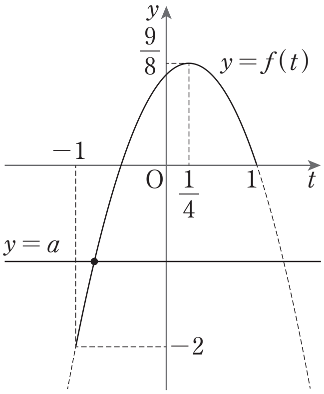
$$-2t^2 + t + 1 = a$$ [B]

と表される。

この式の左辺を $f(t)$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$ において θ の方程式$(*)$を満たす θ が存在するのは，t の方程式 $f(t)=a$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲に解をもつとき，すなわち，$y=f(t)$ のグラフと直線 $y=a$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ において共有点をもつときである。

[B]　グラフをかいて共有点が存在するような範囲を求める。ただし，$\cos\theta = t$ より，t の値の範囲においてグラフを考えることに注意する。

$$f(t)=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$$

ゆえに，次図より求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-2 \leqq a \leqq \frac{9}{8}}$$